Perkolacija

Nives Gošnjak, Luka Peruš, Hugo Trebše
Mentor: David Opalič

Povzetek

Definiramo perkolacijo na mreži $\mathbb{Z}^d$. Posebno pozornost posvetimo kritičnemu parametru p_c in pokažemo, da za $d > 1$ ni trivialen. S pomočjo dualnega grafa in unikatnosti neskončnega omrežja izračunamo $p_c = \frac{1}{2}$ za $d = 2$.

1 Uvod

Intuitivno si lahko perkolacijo predstavljamo kot probabilistični model prepustnega medija. Slednji je pogosto predstavljen z neskončnim grafom $\mathbb{Z}^d$, kjer vsako povezavo med sosednjima točkama neodvisno dodamo s fiksno verjetnostjo p. Zanimajo nas makroskopske lastnosti in geometrijska oblika množice dodanih povezav. Konkretno se v teoriji perkolacij pojavljajo vprašanja, kot so povezanost izhodišča z ostalimi točkami, obstoj neskončnih omrežij in vrednost kritične verjetnosti dodajanja povezav, pri kateri se začnejo pojavljati neskončna omrežja.

Model perkolacije je uporaben tudi zunaj matematične teorije, posebej kot model molekularnih vezi, mikroskopskih pojavov v magnetih ter širjenja bolezni v epidemiologiji. Med drugim lahko uporabimo različne ugotovitve teorije perkolacije kot mero krhkosti omrežij, izpostavljenih naključnim dejavnikom, natančneje kot merilo povezanosti med deli omrežja.

V matematiki je perkolacija relativno nov pojem, prvi članek na to temo je bil objavljen leta 1957. Področje je zanimivo, saj je enostavno razumeti model in postaviti vprašanja o njem, vendar je potrebno ogromno uvida in genialnih prebliskov, da pridemo do rešitve. Mnoge osnovne dinamike sistema se še vedno izmikajo matematični formalizaciji.

Naš model perkolacije, bolj podrobno znan kot Bernullijeva perkolacij povezav, je eden najpreprostejših primerov naključnosti na grafih, običajno mrežah $\mathbb{Z}^d$. Obstajajo številni drugi modeli z drugačno fizikalno interpretacijo, posebej velja omeniti Isingov model in Sherrington-Kirkpatrick model. Gre za zelo aktivno in popularno vejo matematike, kar demonstrira Fieldsova medalja, ki jo je leta 2022 prejel Hugo Duminil-Copin za uspešne preboje v prej omenjenih modelih. Za hiter uvod v perkolacijo, spisan na zelo visokem nivoju, priporočamo njegove zapiske [2]. Za bolj podroben in bralcu prijazen uvod priporočamo [3], iz koder so tudi vzete vse slike, ki jih uporabimo v nadaljevanju.

V članku bomo najprej uvedli nekaj verjetnostnih pojmov. Nato bomo formalno definirali perkolacijo in spoznali našega glavnega igralca – kritično vrednost verjetnosti, pri kateri se začnejo pojavljati neskončne mreže. S krajšim argumentom bomo izračunali vrednost kritične točke v enodimenzionalni različici problema ter omejili vrednost kritične točke v višjih dimezijah. Zatem brez dokaza navedemo ter diskutiramo tri dokazana dejstva, ki omogočijo vrhunec članka – izpeljavo vrednosti kritične točke v dvodimenzionalni različici problema.

2 Verjetnostno ozadje

V tem poglavju bomo definirali nekaj standardnih pojmov iz verjetnosti. Za osvežitev znanja o verjetnosti ter naključnih procesih priporočamo [3]. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor.

Definicija 1. ***(Realna) slučajna spremenljivka*** *X je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Spomnimo se, da sta dogodka A in B *neodvisna* natanko tedaj, ko velja $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Neodvisnost slučajnih spremenljivk definiramo na sledeči način

Definicija 2. *Realni slučajni spremenljivki $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sta* ***neodvisni*** *natanko tedaj, ko velja*

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$

za vse $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Neodvisnost več slučajnih spremenljivk se posploši induktivno.

Za realno slučajno spremenljivko s števno zalogo vrednosti $X : \Omega \to \mathbb{U}$ definiramo njeno *pričakovano vrednost* $\mathbb{E}[X]$ kot

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathbb{U}} x \cdot \mathbb{P}(X = x).$$

Če je zaloga vrednosti X neštevna, se moramo namesto k vsotam zateči k integralom, v kar se ne bomo poglabljali. Ena izmed najpomembnejših lastnosti pričakovane vrednosti, ki jo naredi tako uporabno, je njena linearnost.

Propozicija 1. *Za realni slučajni spremenljivki $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ velja*

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Opomnimo, da zgornja trditev velja tudi za odvisni realni slučajni spremenljivki. Naslednje dejstvo je lahko dokazati. Naj bo $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Sledi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n). \tag{1}$$

Spotoma omenimo še naslednjo lemo, ki je trivialna posledica enačbe (1) ter posebna oblika neenakosti Markova.

Lema 1. *Naj bo $X : \Omega \to \mathbb{N}$ naključna spremenljivka. Sledi:*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i) \geq \mathbb{P}[X \geq 1].$$

V projektu večkrat dokažemo, da se nek dogodek zgodi z verjetnostjo 0 oziroma 1. To izrazimo z izjavo, da se dogodek *skoraj zagotovo ne zgodi* oziroma se *skoraj zagotovo zgodi.* Klasični primer, ki ilustrira potrebnost teh definicij, je primer lokostrelca in tarče. Denimo da izjemno dobro izurjen lokostrelec, ki nikoli ne zgreši tarče, strelja v tarčo. Verjetnost da lokostrelec zadane posamično točko je enaka 0. Kljub temu pa lokostrelec tarče seveda ne zgreši, temveč zadane neko točko na tarči, čeprav je verjetnost, da to točko zadane enaka 0. Sledi, da je potrebno razločiti dogodek, ki se ne more zgoditi, od dogodka, ki se zgodi z verjetnostjo nič. To storimo z izrazom skoraj zagotovo. V nadaljevanju našega članka vedno delamo na primernem podprostoru z mero ena, kjer imamo vse stvari, ki se zgodijo skoraj zagotovo, torej lahko pedantiko podobno zgornji opustimo.

3 Perkolacija

3.1 Graf

Definirajmo graf $\mathbb{L}^d$. Za njegova vozlišča vzamemo množico $\mathbb{Z}^d$ vloženo v $\mathbb{R}^d$. Razdaljo med dvema vozliščema merimo z običajno metriko na grafih, znano kot *taxi razdalja*. Za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je ta definirana kot

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Povezave na grafu so med vsemi vozlišči, ki so na razdalji dolžine 1, to so vozlišča, ki se razlikujejo v natanko eni koordinati. Vozlišča na grafu $\mathbb{L}^d$ imenujemo *točke*. Množico točk označimo z V, množico povezav pa z E.

Pot je zaporedje sosednjih povezav in točk $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots)$, ki je lahko končno ali neskončno. Znotraj ene poti se nobena točka ali povezava ne ponovi. Izjemoma sta lahko prva in zadnja točka končne poti isti in tako pot imenujemo *cikel*. *Škatla* B_n je podgraf grafa $\mathbb{L}^d$ s tokami v $[-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$ in vsemi povezavami znotraj njih. Velja

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \mathbb{L}^d.$$

Naj ∂B_n označuje množico točk, ki predstavljajo *mejo škatle*, to je

$$\partial B_n = \{x \in B_n : \exists\ y \notin B_n \text{ tako, da } d(x, y) = 1\}.$$

3.2 Verjetnost in geometrija

Naj bo $0 \leq p \leq 1$. Vsaka povezava v E se neodvisno od vseh ostalih odpre z verjetnostjo p, drugače ostane zaprta. Bolj formalno, naš prostor je $\Omega = \{0, 1\}^E$, σ-algebra je generirana s končnimi cilindri in verjetnostna mera je produktna mera $\mathbb{P}_p$. Za potrebe tega članka je dovolj razumeti le intuitivno definicijo perkolacije kot odpiranje povezav. Indeks p v verjetnostni meri $\mathbb{P}_p$ ali pričakovani vrednosti $\mathbb{E}_p$ označuje verjetnost, s katero se posamezna povezava odpre.

Pravimo, da sta dve točki *povezani*, če med njima obstaja pot po odprtih povezavah. Tako pot imenujemo *odprta pot*, pot po zaprtih povezavah pa *zaprta pot*. Z oznako $A \longleftrightarrow B$ označimo, da je vsaj ena točka iz množice točk A povezana z vsaj eno točko iz množice točk B v $\mathbb{L}^d$. Da poenostavimo notacijo, bomo v nadaljevanju za posamezne točke pisali $\{x\} = x$. Naj bo *omrežje* x, označeno s $C(x)$, množica točk, ki so v $\mathbb{L}^d$ povezane s točko x,

$$C(x) = \{y : x \longleftrightarrow y\}.$$

Naj bo $x \in B_n$. Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $y \notin B_n$, da je $x \longleftrightarrow y$, potem to označimo z $x \longleftrightarrow \infty$. Označimo s $C = C(0)$. Definirajmo $\theta(p)$, ki nam pove, kolikšna je verjetnost da je $|C| = \infty$, torej

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[0 \longleftrightarrow \infty].$$

Opazimo lahko, da je $\theta(0) = 0$ in $\theta(1) = 1$. Razumeti obnašanje $\theta(p)$ je ključno za razumevanje perkolacije, a veliko njenih lastnosti se še vedno izmika matematikom. Kar vemo, je skicirano na sliki 1.

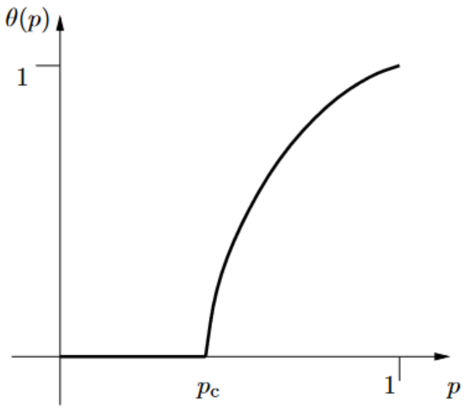
3.3 Kritična točka

Naj bo $p_c = p_c(\mathbb{L}^d)$ *kritična točka*, definirana kot

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Najprej izračunajmo p_c za $d = 1$. V tem primeru imamo graf $\mathbb{L}^1$, kar je neskončna premica točk in povezav. Naj bo $\theta(p)^+$ verjetnost, da se točka 0 poveže z neskončnostjo v pozitivni smeri in $\theta(p)^-$ verjetnost, da se točka 0 poveže z neskončnostjo v negativni smeri. Potem, za $p < 1$, velja

$$\theta(p) \leq \theta(p)^+ + \theta(p)^- = 2 \cdot \lim_{n \to \infty} p^n = 2 \cdot 0 = 0.$$



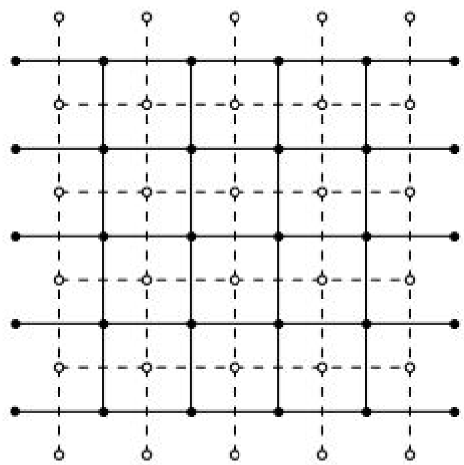
Slika 1: Graf $\theta(p)$ in kritična točka p_c.

To pomeni, da je $p = 1$ edina vrednost, za katero je $\theta(p) > 0$. Posledično velja $p_c(\mathbb{L}^1) = 1$. O p_c in $\theta(p)$ je za višje dimenzije znano malo formalnih rezultatov. Vemo pa, da se bo za večje dimenzije d vrednost p_c manjšala. To si lahko predstavljamo tako, da graf $\mathbb{L}^d$ vložimo v graf $\mathbb{L}^{d+1}$. Res opazimo, da velja $p_c(\mathbb{L}^d) \geq p_c(\mathbb{L}^{d+1})$, saj nam dodatna dimenzija lahko doda nove poti, že obstoječih pa ne more prekiniti.

V dveh dimenzijah še imamo dovolj orodij, da lahko ugotovimo točno vrednost $p_c(\mathbb{L}^2)$. Pomagamo si tako, da definiramo *dualni graf* grafa $\mathbb{L}^2$, ki ga označimo z $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{L}^2)$. Prvotni graf bomo včasih imenovali *original*. Dualni graf ali krajše dual je izomorfen originalu, a so njegova vozlišča glede na originalni graf zamaknjena. Množica vozlišč duala je

$$\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Posledično je vsaka točka v dualu ravno središče kvadrata točk v originalu, vse povezave med dualom in originalom pa se sekajo pod pravim kotom. Povezave v $\mathcal{D}$ se odpirajo in zapirajo glede na njegov original, tako da če povezava v $\mathcal{D}$ seka odprto povezavo v $\mathbb{L}^2$, se ta odpre in če povezava v $\mathcal{D}$ seka zaprto povezavo v $\mathbb{L}^2$, ostane zaprta. Tako imata original in dual enako verjetnostno mero, kar pomeni, da če opazujemo le en dogodek na enem izmed grafov, ne vemo, ali gledamo original ali njegov dual. Definiramo tudi *škatle v dualu*, ki jih označimo z B_n^d. To je najmanjši cikel v $\mathcal{D}$, ki vsebuje celotno škatlo B_n iz $\mathbb{L}^d$.



Slika 2: Graf $\mathbb{L}^2$ in njegov dual.

4 Netrivialnost p_c

Rezultati in opazovanja iz poglavja 3 nas vodijo do problema določitve vrednsoti p_c v odvisnosti od dimenzije d. Žal ta problem presega namen tega članka, zaradi česar se odločimo dokazati naslednjo, mnogo manj ambiciozno trditev.

Izrek 1. *Za $d \geq 2$ je $0 < p_c(\mathbb{L}^d) < 1$.*

Dokaz. Dokaz neenakosti $0 < p_c < 1$ v $\mathbb{L}^d$ za $d \geq 2$ razdelimo na dva dela.

$\mathbf{p_c > 0}$:

Najprej definirajmo nekaj količin. Naj N_n označuje množico odprtih poti dolžine n iz 0. Obenem naj Q_n označuje množico vseh poti iz 0 (tj. ne nujno odprtih poti) dolžine n. Lahko vidimo, da je za vsak n dogodek $\{|C| = \infty\} \subset \{|N_n| \geq 1\}$. Posledično sledi, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[|C| = \infty] \leq \mathbb{P}_p[|N_n| \geq 1].$$

Po neenakosti (1) za vsak n sledi

$$\theta(p) \leq \mathbb{E}[|N_n|] = \sum_{j \in Q_n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{j \in N_n\}}] = \sum_{j \in Q_n} \mathbb{P}[j \in N_n] \leq |Q_n| \cdot p^n.$$

Na sledeči način grobo ocenimo $|Q_n|$ kot

$$|Q_n| \leq 2d(2d-1)^{n-1},$$

kjer smo preštelі prav vse možne sprehode, ne pa samo poti. Za $p < \frac{1}{2d}$ pa velja

$$\lim_{n \to \infty} 2d(2d-1)^{n-1} p^n \leq \lim_{n \to \infty} 2d(2d-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2d}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2d-1}{2d}\right)^{n-1} = 0.$$

Dokazali smo, da ob izbiri $p < \frac{1}{2d}$ velja

$$\theta(p) \leq 0,$$

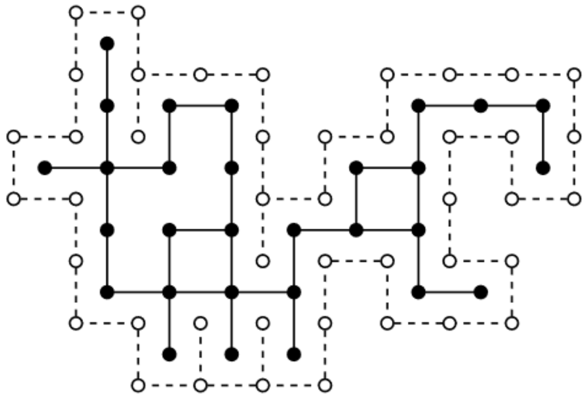
iz česar sledi $\theta(p) = 0$. Pokazali smo, da lahko izberemo dovolj majhen, a neničelen p, da omrežje točke 0 ne doseže neskončnosti. Torej je kritična vrednost p_c večja od izbrane vrednosti p, kar implicira neničelnost p_c.

$\mathbf{p_c < 1}$:

Definirajmo M_n kot množico zaprtih ciklov v $\mathcal{D}(\mathbb{L}^2)$, ki v svoji notranjosti vsebujejo točko 0. Dokazali bomo, da vsaj ena taka pot obstaja natanko tedaj, ko velja $|C| \neq \infty$.

Najprej dokažemo, da $|C| \neq \infty$ implicira obstoj zaprtega cikla s točko 0 v notranjosti. Vsaki točki v $\mathbb{L}^2$ dodelimo vrednost 1 v primeru, da je element omrežja C, v nasprotnem primeru točki dodelimo vrednost 0. Ker je $|C| \neq \infty$, je število točk, katerim je bila dodeljena vrednost 1, končno. Če v originalu opazujemo cikel maksimalne dolžine točk z vrednostjo 1, je ta v originalu obkrožen s ciklom točk z vrednostjo 0. Ker je povezava med točko z vrednostjo 0 ter točko z vrednostjo 1 zaprta, to pomeni, da v dualu $\mathbb{L}^2$ obstaja zaprt cikel, ki poteka med ciklom maksimalne dolžine točk z vrednostjo 1 ter ciklom točk z vrednostjo 0, ki ga obkroža.

Sedaj dokažemo, da obstoj zaprtega cikla v $\mathcal{D}\left(\mathbb{L}^2\right)$, ki ima v notranjosti točko 0, implicira $|C| \neq \infty$. Argument je obratna verzija zgornjega. Opazujmo množico takih točk, da za poljubno točko v tej množici obstaja zaprta povezava v $\mathbb{L}^2$, ki je dualno povezana z neko potjo zaprtega cikla v $\mathcal{D}\left(\mathbb{L}^2\right)$, katerega obstoj smo predpostavili. Vsaki točki te množice dodelimo vrednost 1, če se nahaja znotraj zaprtega cikla v $\mathcal{D}\left(\mathbb{L}^2\right)$, in 0 v nasprotnem primeru. Opazimo, da točke, katerim smo dodelili vrednost 0, tvorijo sklenjen cikel v $\mathbb{L}^2$ s točko 0 v notranjosti. Enaka trditev velja za točke, ki smo jim dodelili vrednost 1. Cikel točk z vrednostjo 1 je v celoti vsebovan znotraj cikla točk z vrednostjo 0, med njimi pa poteka zaprta povezava. Iz tega sledi, da ni mogoče, da bi bilo omrežje točke 0 neskončno, saj ne more prečkati povezave med cikloma točk vrednosti 1 in 0, obenem pa je znotraj cikla točk vrednosti 1 le končno mnogo točk. Slika 3 prikaže omenjene povezane odprte in zaprte poti v grafu $\mathbb{L}^2$ ter njegovem dualu.



Slika 3: Zaprt cikel duala, ki vsebuje 0 ter končno omrežje 0.

Definirajmo K_n kot množico vseh sklenjenih poti v $\mathcal{D}(\mathbb{L}^2)$ (ne nujno zaprtih), ki vsebujejo točko 0 v svoji notranjosti. Ker je $p_c(\mathbb{L}^d)$ padajoče v d, je dovolj dokazati $p_c(\mathbb{L}^2) < 1$. V $\mathbb{L}^2$ velja

$$1 - \theta(p) = \mathbb{P}_p[|C| < \infty] = \mathbb{P}_p\left[\sum_n |M_n| \geq 1\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_n |M_n|\right] = \sum_n \mathbb{E}\left[|M_n|\right],$$

pri čemer neenakost velja zaradi neenakosti (1), zadnja enakost pa zaradi linearnosti pričakovane vrednosti. Vpeljujoč indikatorsko spremenljivko $\mathbb{1}_{\{j \in M_n\}}$ skrajno desni izraz zapišemo kot

$$\sum_n \mathbb{E}\left[|M_n|\right] = \sum_n \sum_{j \in K_n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{j \in M_n\}}\right] = \sum_n \sum_{j \in K_n} \mathbb{P}\left[j \in M_n\right].$$

Ker je verjetnost, da je sklenjena pot dolžine n v dualu v celoti zaprta, enaka $(1-p)^n$, lahko zapišemo naslednjo neenakost

$$\sum_n \sum_{j \in K_n} \mathbb{P}\left[j \in M_n\right] \leq \sum_n \sum_{j \in K_n} (1-p)^n \leq \sum_n n \cdot 4^n (1-p)^n.$$

Pri tem smo K_n navzgor omejili tako, da smo prešteli vse sprehode v dualu, ki sekajo pozitivno polovico $x = 0$ osi na razdalji manj kot n od 0. Za izbiro p, ustrezno blizu, a ne enako, 1, sledi

$$\theta(p) \geq 1 - \sum_n n \cdot 4^n (1-p)^n > 0.$$

Ker je $\theta(p) > 0$, sledi $p > p_c$. Izbira $p < 1$ dokaže željeno trditev, da je $1 > p > p_c$.

□

5 Dejstva

Pri računanju vrednosti p_c za $d = 2$ bomo potrebovali tri dejstva, ki jih sicer ne bomo dokazovali, bomo pa podali ideje, zakaj ta dejstva intuitivno držijo. Bralec lahko dokaze najde v [3]. Najprej omenimo, da lahko graf $\theta(p)$ razdelimo na tri območja glede na p. To so faze *nad kritično točko*, *pod kritično točko* in *blizu kritične točke*. Medtem ko o tem, kaj točno se dogaja blizu kritične točke, vemo zelo malo, pa so faze nad in pod p_c dobro raziskane.

i) Nad kritično točko

Naj bo A dogodek in $\mathbb{P}$ poljubna mera. *Translacija* dogodka je preslikava $\mathbb{L}^d$ tako, da se vse točke premaknejo za enak vektor. Translacijo za vektor x označimo z τ_x. Če velja $\tau_x A = A$ za vsak x, pravimo, da je dogodek *invarianten pod translacijami.* Če za vse take dogodke velja, da je $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$, rečemo, da je mera $\mathbb{P}$ *ergodična.*

Ni težko pokazati, da je naša mera $\mathbb{P}_p$ ergodična za vsak p. Naj bo I število neskončnih omrežij. Hitro ugotovimo, da je dogodek $I = k$ invarianten pod translacijami, saj se pri translaciji ta omrežja le premaknejo, ne pa tudi spremenijo oblike, prav tako tudi niso vezana na začetno točko. Iz tega sledi, da je verjetnost $\Psi(p) = \mathbb{P}_p[I \geq 1] \in \{0, 1\}$. Za $p > p_c$ dobimo iz 0 neskončno omrežje s pozitivno verjetnostjo. Ker je $\mathbb{Z}^d$ neskončen, je posledično zaradi ergodičnosti $\Psi(p) = 1$. Torej velja

$$\mathbb{P}[I = k] = \begin{cases} 1 & \text{za eno vrednost } k, \\ 0 & \text{za vse ostale vrednosti } k. \end{cases}$$

A priori lahko k zavzame vrednosti v $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Recimo, da je $k > 1$ končen. Izberimo takšno konfiguracijo in odprimo vse povezave na poti med dvema neskončnima omrežjema. Takšna pot je končna, torej se tudi nova konfiguracija lahko zgodi s pozitivno verjetnostjo. Tako iz k omrežij dobimo $k-1$ omrežij, ravno prej pa smo omenili, da je $\mathbb{P}[I = k] = 1$ le za eno vrednost k, za ostale pa je enaka 0. To pomeni, da ne more hkrati imeti k in $k - 1$ neskončnih omrežij s pozitivno verjetnostjo. Če ta sklep še nekajkrat ponovimo, ugotovimo, da če je k končen, mora veljati $k = 1$.

Še vedno imamo možnost, da obstaja neskončno mnogo različnih neskončnih omrežij. Tukaj zgornja ideja ne deluje, saj po povezovanju še vedno ostane neskončno mnogo omrežij. Vseeno pa obstaja prelep dokaz, znan kot Burton-Keane, [1], da ne more obstajati neskončno mnogo različnih neskončnih omrežij. Za moderno verzijo Burton-Keane argumenta priporočamo [2]. Torej velja, da za $p > p_c$ obstaja natanko eno neskončno omrežje.

ii) Pod kritično točko

Za vse $p < p_c$ velja, da je $\theta(p) = 0$, vseeno pa nas zanima, kako daleč lahko pridemo od točke 0. Naj bo $\theta_n(p) = \mathbb{P}[0 \longleftrightarrow B_n]$. Opazimo, da velja $\theta_n(p) > \theta_{n+1}(p)$, saj vedno težje pridemo do naslednje večje škatle. Izkaže se, da verjetnost pada eksponentno. Natančneje velja, da za vsak n obstaja tak $c > 0$, da imamo

$$\theta_n(p) \leq e^{-cn}. \tag{2}$$

iii) FKG neenakost

Motivacija pride iz ideje, da sta dve točki bolj verjetno povezani, če že vemo, da neka povezava obstaja, saj nas sedaj zanima le še verjetnost za odprtje preostalih povezav namesto vseh. Za $x, y, z, w \in V$ velja

$$\mathbb{P}[x \longleftrightarrow y | z \longleftrightarrow w] \geq \mathbb{P}[x \longleftrightarrow y].$$

Pravimo, da je dogodek A *naraščajoč*, če za vsaka $p > q$ velja $\mathbb{P}_p[A] \geq \mathbb{P}_q[A]$. Za *padajoč* dogodek velja obratno. Če sta dogodka A in B oba naraščajoča ali oba padajoča, se izkaže, da velja

$$\mathbb{P}_p[A \cup B] \geq \mathbb{P}_p[A] \cdot \mathbb{P}_p[B]. \tag{3}$$

To je posebna verzija Fortuin–Kasteleyn–Ginibre-jeve neenakosti, ali na kratko FKG neenakosti. Ker je dogodek $0 \longleftrightarrow \infty$ naraščajoč, je ta neenakost zelo uporabna.

6 Vrednost p_c v dveh dimenzijah

Dejstva v prejšnjem poglavju je težko dokazati in so močna orodja za izračun p_c. Glavna ideja dokaza naslednjega rezultata je simetričnost med zaprtimi in odprtimi povezavami za $p = \frac{1}{2}$ ter $\mathbb{L}^2$ in njegovim dualom. V dveh dimenzijah je dovolj malo prostora, da uspemo s tem priti do rešitve.

Izrek 2. *Velja* $p_c(\mathbb{L}^2) = \frac{1}{2}$.

Dokaz. Naj bo $p = \frac{1}{2}$. Najprej s protislovjem dokažimo, da je $p_c \geq \frac{1}{2}$. Predpostavimo torej $p_c < \frac{1}{2}$. To pomeni, da je $p_c < p$, zato obstaja edinstveno neskončno omrežje. Če obstaja povezava med ∂B_{n-1} in neskončnim omrežjem, obstaja takšna povezava tudi za ∂B_{n-1}. Posledično je $\mathbb{P}[\partial B_n \longleftrightarrow \infty]$ naraščajoča v n in ker ima limito 1, lahko fiksiramo dovolj velik N, da velja

$$\mathbb{P}[\partial B_N \longleftrightarrow \infty] > 1 - \frac{1}{8^4}.$$

Stranice ∂B_N poimenujmo z L, D, T in B, tako da sta si L in D nasprotni, prav tako pa sta si nasprotni stranici T in B. Naj bo A_X za $X \in \{L, D, T, B\}$ dogodek, da obstaja povezava med stranico X in neskončnostjo, ki ne poteka skozi nobeno točko v B_N. Naj $\bar{A}$ označuje komplement dogodka A. Ker je $\mathbb{P}_p[A_X]$ naraščajoča, je posledično $\mathbb{P}_p\left[\bar{A}_X\right]$ padajoča v p. Med ∂B_N in neskončnim omrežjem ni povezave natanko takrat, ko ni povezave med nobeno stranico ∂B_N in neskončnim omrežjem. S pomočjo FKG neenakosti (3) velja

$$\mathbb{P}[\partial B_N \not\longleftrightarrow \infty] = \mathbb{P}_p\left[\bar{A}_L \cap \bar{A}_D \cap \bar{A}_T \cap \bar{A}_B\right] \geq \mathbb{P}_p\left[\bar{A}_L\right]\mathbb{P}_p\left[\bar{A}_D\right]\mathbb{P}_p\left[\bar{A}_T\right]\mathbb{P}_p\left[\bar{A}_B\right] = \mathbb{P}_p\left[\bar{A}_X\right]^4$$

za vsak $X \in \{L, D, T, B\}$. Torej velja

$$\mathbb{P}_p\left[\bar{A}_X\right]^4 \leq 1 - \mathbb{P}[\partial B_N \longleftrightarrow \infty] < 1 - (1 - \frac{1}{8^4}) = \frac{1}{8^4},$$

iz česar sledi $\mathbb{P}_p\left[\bar{A_X}\right] < \frac{1}{8}$ in zato

$$\mathbb{P}_p[A_X] > \frac{7}{8}.$$

Dogodek, da je posamezna stranica $X \in \{L, D, T, B\}$ meje dualne škatle ∂B_N^d povezana z neskončnostjo z zaprto potjo, ki ne poteka skozi B_N^d, označimo z D_X. Imamo dvojno simetrijo med zaprtimi in odprtimi potmi ter med originalnim grafom in njegovim dualom, zato velja $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[A_X] = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[D_X]$ za vsak X. Naj bo $A = A_L \cup A_D \cup D_B \cup D_T$. Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\bar{A}] &= \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\,\overline{A_L \cap A_D \cap D_B \cap D_T}\right] \\
&= \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bar{A}_L \cup \bar{A}_D \cup \bar{D}_B \cup \bar{D}_T\right] \\
&\leq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bar{A}_L\right] + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bar{A}_D\right] + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bar{A}_T\right] + \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}\left[\bar{A}_R\right].
\end{aligned}$$

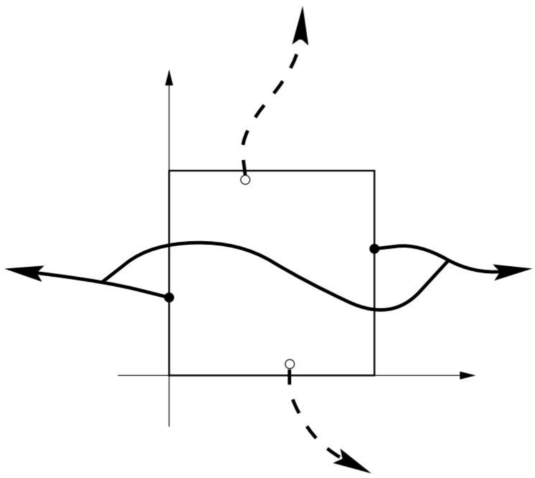
Za vsak X je $\mathbb{P}[\bar{A}_X] \leq \frac{1}{8}$, torej je $\mathbb{P}[\bar{A}] \leq \frac{1}{2}$, oziroma

$$\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[A] \geq \frac{1}{2}.$$

To pomeni, da je verjetnost, da je par stranic (L, D) na ∂B_N povezan z neskončnostjo hkrati kot par stranic (T, B) na ∂D_N, vsaj $\frac{1}{2}$. Ker imamo zgolj eno neskončno omrežje, je par stranic (L, D) povezan z odprto potjo v originalnem grafu, par (T, B) pa je povezan z zaprto potjo v njegovem dualu. Odprte poti v osnovnem grafu po definiciji dualnega grafa ne more prečkati njegove zaprte poti, ki povezuje T in B stranico dualne škatle in se v vsako stran nadaljuje v neskončnost. To zaprto pot lahko obravnavamo kot cikel, sklenjen skozi neskončnost, ki ravnino razdeli na dva dela. Ker pa se krajišči odprte poti začneta na nasprotnih straneh, se torej nikoli ne moreta povezati, kar pomeni, da je $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[A] = 0$, to pa je protislovje. Sledi, da je naša predpostavka $p_c < \frac{1}{2}$ napačna in torej $p_c \geq \frac{1}{2}$.

Predpostavimo zdaj, da je $p_c > \frac{1}{2}$. Imamo $p < p_c$ in smo v pod kritični fazi. Definirajmo podgraf G_n, ki ima za vozlišča podmnožico našega grafa na intervalih $x_1 \in [0, n+1]$ in $x_2 \in [0, n]$, H_n pa naj bo podmnožica vozlišč duala na intervalih $x_1 \in [0, n]$ in $x_2 \in [0, n+1]$. Naj bo E dogodek, da sta leva in desna stranica G_n povezani samo preko povezav v G_n, in F dogodek, da sta zgornja in spodnja stranica na H_n povezani z zaprto potjo samo s povezavami v H_n. Opazimo, da se vedno zgodi natanko eden izmed dogodkov E in F. Ker je $p = \frac{1}{2}$ in sta grafa izomorfna z isto verjetnostno mero, velja, da sta dogodka E in F enako verjetna. Dokaz prikazuje slika 4.

Sledi $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E] = \frac{1}{2}$. Spomnimo se enačbe (2), ki nam v pod kritični fazi omeji verjetnost, da je točka 0 povezana z neko stranico v ∂B_n. Verjetnost, da se zgodi E, lahko ocenimo kot



Slika 4: Leva in desna stranica G_n sta povezani z odprto potjo.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[L \longleftrightarrow D] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{x\in L} x \longleftrightarrow D\right]\\ &\le \sum_{x\in L}\mathbb{P}[x \longleftrightarrow D]\\ &= \sum_{x\in L} e^{-c(n+1)}\\ &= n\cdot e^{-c(n+1)}.\end{aligned}$$

Torej imamo $\frac{1}{2} \le n \cdot e^{-c(n+1)}$ za poljuben n, kar je protislovje za velike n. S tem smo dokazali, da je $p_c \le \frac{1}{2}$. Imamo $\frac{1}{2} \le p_c \le \frac{1}{2}$, iz česar sledi $p_c = \frac{1}{2}$.

□

7 Zaključek

V dveh dimenzijah nam je uspelo natančno določiti vrednost p_c. Argument ni bil enostaven in opirali smo se na številne lastnosti perkolacije, ki jih ni lahko dokazati. Prav tako je ključno vlogo igrala nizko-dimenzionalnost. V višjih dimenzijah je dovolj prostora, da se lahko odprta in zaprta pot izmuzneta v neskončnost ena mimo druge, brez, da razdelita prostor na dva dela. Našo mejo $0 < p_c < 1$ lahko izboljšamo z elementarnimi tehnikami in z boljšim štetjem poti, vendar je moč neenakosti, ki jih lahko dobimo na ta način, omejena. Precej ostrejše meje dobimo s pomočjo Grimmett-Marstrandove konstrukcije, ki je višje dimenzionalna razširitev ideje o sekanju poti. Vendar tudi to ni dovolj za določitev točne vrednosti p_c za $d \ge 3$ in razumevanje kritične točke ostaja eden najbolj perečih problemov naključnih modelov na grafih.

Literatura

[1] Robert M Burton and Michael Keane, *Density and uniqueness in percolation*, Communications in mathematical physics **121** (1989), 501–505.

[2] Hugo Duminil-Copin, *Introduction to bernoulli percolation*, Lecture notes available on the webpage of the author (2018).

[3] GR Grimmet and DR Sterzaker, *Probability and random processes. oxford: Oxford sc. publ* (1992).